**Opgave 1** (Hendrik Lenstra, universiteit Leiden, 2017-demachten)**.** Stel dat $G$ en $H$ eindige groepen zijn en $f\colon G \to H$, $g\colon H \to G$ groepshomomorfismen. Bewijs dat het aantal elementen $x \in G$ met $g(f(x^{2017})) = x$ gelijk is aan het aantal elementen $y \in H$ met $f(g(y^{2017})) = y$.

**Oplossing.** Definieer de afbeelding $h\colon G \to H$ door $h(x) = f(x^{2017})$. Dan geldt $g(f(x^{2017})) = g(h(x))$ voor alle $x \in G$, en $f(g(y^{2017})) = f(g(y)^{2017}) = h(g(y))$ voor alle $y \in H$. Wat we moeten bewijzen komt er dus op neer dat de verzameling $A = \{x \in G : g(h(x)) = x\}$ evenveel elementen heeft als de verzameling $B = \{y \in H : h(g(y)) = y\}$. Voor $x \in A$ geldt $h(x) = h(g(h(x)))$ dus $h(x) \in B$, dus $h$ beeldt $A$ naar $B$ af. Evenzo bewijst men: $g$ beeldt $B$ naar $A$ af. Omdat $g \circ h$ de identiteit is op $A$ en $h \circ g$ de identiteit is op $B$, zijn $h\colon A \to B$ en $g\colon B \to A$ elkaars tweezijdige inversen. Ze zijn dus bijectief, waaruit volgt dat $A$ en $B$ evenveel elementen hebben. $\square$

**Opgave 2** (Arne Smeets, Radboud Universiteit Nijmegen, periodieke rij)**.** Zij $\alpha \in [-1,1]$. Definieer de rij $(x_n)_{n\geq 1}$ door $x_1 = \alpha$ en $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$. Voor welke waarden van $\alpha$ is deze rij uiteindelijk periodiek?

**Oplossing.** De rij is periodiek DESDA $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.
Als $\alpha < 0$ volgt met inductie dat $x_n < 0$ voor alle $n$, en dus $x_{n+1} = 1 - (1 - 2x_n) = 2x_n$ voor alle $n$. Dan worden de termen van de rij steeds kleiner en is de rij dus nooit periodiek.
Als $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, merk dan op dat de noemers van de breuken in de rij enkel kunnen dalen, en alle termen liggen in $[0,1]$; bijgevolg bevat de rij slechts eindig veel termen, en dat geeft direct de periodiciteit.
Omgekeerd, merk op dat voor alle $k$ en $n$ geldt dat $x_{n+k} = a_k + 2^k \delta_k x_n$, met $\delta_k = \pm 1$ en $a_k \in \mathbb{Z}$. Als $x_{n+k} = x_n$ voor zekere $k$ en $n$, dan moet $x_n \in \mathbb{Q}$ voor die $n$, maar dat impliceert direct $x_n \in \mathbb{Q}$ voor *alle* $n$. $\square$

**Opgave 3** (Josse van Dobben de Bruyn BSc, Universiteit Leiden, lastige limiet)**.** Voor iedere $n \in \mathbb{N}^+ = \{1, 2, \ldots, \}$ definiëren we de functie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(p) \;:=\; n\left(1 \;-\; \left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right).$$

Bewijs dat de rij functies $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ puntsgewijs convergeert en bepaal de limiet. (Met andere woorden: bewijs voor iedere $p \in \mathbb{R}$ dat de rij $\{f_n(p)\}_{n=1}^{\infty}$ convergeert en bepaal de limiet als functie van $p$.)
Mocht het je niet lukken om het algemene geval te bewijzen: je kunt maximaal 3 punten verdienen als je dit alleen bewijst voor het geval $p = -\frac{1}{2}$.

**Oplossing.** Er zijn verschillende manieren om dit aan te pakken. We geven er drie.

## Uitwerking 1 (substitutie)

Substitueer $s_n = \frac{1}{n}$, dan vinden we:

$$f_n(p) \;=\; -\frac{1}{s_n} \cdot \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-p} - 1\right) \;=\; -\frac{(1+s_n)^{-p} - 1}{s_n}.$$

We weten van calculus dat de functie $g_p(y) := y^{-p}$ differentieerbaar is op $(0, \infty)$ met afgeleide

$$g_p'(y) \;=\; -py^{-p-1}.$$

Daaruit volgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{-p} - 1}{h} \;=\; g_p'(1) \;=\; -p.$$

Gezien de rij $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ naar 0 convergeert, geldt in het bijzonder

$$\lim_{n \to \infty} f_n(p) \;=\; -\lim_{n \to \infty} \frac{(1+s_n)^{-p} - 1}{s_n} \;=\; p.$$

## Uitwerking 2 (middelwaardestelling)

Zij $p \in \mathbb{R}$ willekeurig gegeven. Merk op dat geldt:

$$f_n(-p) \;=\; n - \frac{n^{-p+1}}{(n+1)^{-p}} \;=\; \frac{n^p}{n^{p-1}} - \frac{(n+1)^p}{n^{p-1}} \;=\; \frac{n^p - (n+1)^p}{n^{p-1}}.$$

Dit is van de vorm

$$f_n(-p) \;=\; p \cdot \frac{g(n) - g(n+1)}{g'(n)}, \qquad \text{met } g(n) := n^p.$$

Merk op dat $g$ continu en oneindig vaak differentieerbaar is op $\mathbb{R}_{>0}$. We maken nu gebruik van de middelwaardestelling: voor elke $n \in \mathbb{N}^+$ kunnen we een $y_n \in (n, n+1)$ kiezen zodanig dat $g'(y_n) = g(n+1) - g(n)$ geldt, dus

$$f_n(-p) \;=\; -p \cdot \frac{g'(y_n)}{g'(n)}.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(-p) &= \lim_{n\to\infty} -p \cdot \frac{p \cdot y_n^{p-1}}{p \cdot n^{p-1}} \\
&= -p \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{y_n}{n}\right)^{p-1} \\
&= -p \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{n}\right)^{p-1} && \text{(want } x \mapsto x^{p-1} \text{ is continu)} \\
&= -p \cdot 1^{p-1} && \left(\text{want } \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{n} = 1\right) \\
&= -p.
\end{aligned}$$

Kortom: de rij $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergeert puntsgewijs naar de functie $p \mapsto p$.

## Uitwerking 3 (algebraïsch)

**Basisgevallen ($p = 0$, $p = 1$ en $p = -1$)**

We beginnen met de volgende drie basisgevallen:

- Voor $p = 0$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) \;=\; \lim_{n\to\infty} n \cdot (1-1) \;=\; \lim_{n\to\infty} 0 \;=\; 0.$$

- Voor $p = 1$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) \;=\; \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{1}{n+1}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \;=\; 1.$$

- Voor $p = -1$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(-1) \;=\; \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n+1}{n}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \big(n \;-\; (n+1)\big) \;=\; \lim_{n\to\infty} -1 \;=\; -1.$$

**Gehele waarden van $p$**

Merk op dat voor alle $m \in \mathbb{N}^+$ en alle $y \in \mathbb{R}$ het volgende geldt:

$$1 - y^m \;=\; (1-y)\big(1 + y + \cdots + y^{m-1}\big).$$

Voor alle $p \in \mathbb{R}$ en $n, m \in \mathbb{N}^+$ geldt dus

$$\begin{aligned} f_n(mp) \;&=\; n\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^p + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2p} + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(m-1)p}\right) \\ &=\; f_n(p) \cdot \left(1 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^p + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2p} + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(m-1)p}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Daaruit volgt dat het volgende geldt voor alle $p \in \mathbb{N}^+$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(p) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(1)\right)\left(\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{n}{n+1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1}\right) = 1 \cdot p \;=\; p.$$

Analoog vinden we voor $p \in \mathbb{N}^+$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(-p) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(-1)\right)\left(\lim_{n\to\infty} 1 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-2} + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1}\right) = -p.$$

Kortom: voor alle $p \in \mathbb{Z}$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(p) \;=\; p.$$

**Rationale waarden van $p$**

We gebruiken wederom vergelijking (1): voor alle $a \in \mathbb{Z}$ en $b, n \in \mathbb{N}^+$ geldt

$$f_n(a) \;=\; f_n\Big(\frac{a}{b}\Big) \cdot \left(1 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{a}{b}} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2\frac{a}{b}} + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(b-1)\frac{a}{b}}\right),$$

dus

$$\lim_{n\to\infty} f_n\Big(\frac{a}{b}\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(a)}{1 + \big(\frac{n}{n+1}\big)^{\frac{a}{b}} + \big(\frac{n}{n+1}\big)^{2\frac{a}{b}} + \cdots + \big(\frac{n}{n+1}\big)^{(b-1)\frac{a}{b}}} \;=\; \frac{a}{b}.$$

**Reële waarden van $p$**

Om het resultaat uit te breiden naar alle reële $p$, zullen we op één of andere manier continuïteit moeten gebruiken. Dat ligt vrij subtiel: de convergentie is niet uniform, en de puntsgewijze limiet van een rij continue functies is niet noodzakelijk continu. Bovendien weten we op dit moment nog niet eens dat de rij $\{f_n(p)\}_{n=1}^{\infty}$ überhaupt convergeert voor $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

We lossen dit op door te gebruiken dat iedere $f_n$ een monotoon stijgende functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is. Dat zullen we nu eerst kort bewijzen. Voor een gegeven constante $0 < \gamma < 1$ is de functie $p \mapsto \gamma^p$ strikt dalend op heel $\mathbb{R}$. Voor ieder tweetal positieve constanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ is de functie $p \mapsto C_1 - C_2\gamma^p$ dus strikt stijgend op $\mathbb{R}$. Iedere $f_n$ is van deze vorm, met $\gamma = \frac{n}{n+1}$ en $C_1 = C_2 = n$, dus we zien dat iedere $f_n$ strikt stijgend is in $p$.

Zij nu $p \in \mathbb{R}$ gegeven. Voor ieder tweetal rationale getallen $\alpha, \omega \in \mathbb{Q}$ met $\alpha < p < \omega$ geldt:

- De rijen $\{f_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ en $\{f_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ convergeren naar respectievelijk $\alpha$ en $\omega$.
- Voor alle $n \in \mathbb{N}^+$ geldt $f_n(\alpha) < f_n(p) < f_n(\omega)$.

Voor iedere $\varepsilon > 0$ ligt de rij $\{f_n(p)\}_{n=1}^{\infty}$ dus uiteindelijk in het interval $(\alpha - \varepsilon, \omega + \varepsilon)$.

Nu is het eenvoudig aan te tonen dat de rij $\{f_n(p)\}_{n=1}^{\infty}$ convergeert naar $p$. Zij $\varepsilon > 0$ gegeven, dan kiezen we rationale $\alpha \in (p - \varepsilon, p)$ en $\omega \in (p, p + \varepsilon)$. Uit het voorgaande volgt nu dat de rij $\{f_n(p)\}_{n=1}^{\infty}$ uiteindelijk in het interval $(\alpha - \varepsilon, \omega + \varepsilon) \subseteq (p - 2\varepsilon, p + 2\varepsilon)$ ligt. Dit bewijst dat de rij convergeert naar $p$. $\square$

**Opgave 4** (Julian Lyczak, kwadraten)**.** Laat $a$ en $b$ twee cijfers zijn ongelijk aan 0 en bekijk de rij getallen

$$\overline{a}, \overline{ab}, \overline{abb}, \overline{abbb}, \ldots.$$

(a) Bewijs dat er in deze rij eindig veel kwadraten staan.

(b) Wat is het maximale aantal kwadraten dat kan voorkomen?

Hier staat $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ voor het decimale getal met cijfers $a_n$, $a_{n-1}$ tot en met $a_0$, oftewel

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

**Oplossing.**

(a) We bewijzen dat een getal in de rij met minstens vier $b$'s op het eind geen kwadraat is. Hieruit volgt direct het gevraagde. Voor zo'n getal geldt

$$\overline{abb \ldots bb} \equiv \overline{bbbb} \equiv 1111b \equiv 7b \mod 16.$$

Nu is een kwadraat altijd congruent aan 0, 1, 4 of 9 modulo 16, dus dan moet er gelden dat $7b$ congruent is aan 0, 1, 7 of 9 modulo 16. De restklasse 7 is inverteerbaar met inverse 7, dus vinden we dat $b$ congruent is aan 0, 7, 12 of 15 modulo 16. Aangezien we ook weten dat $b$ een cijfer is ongelijk aan 0 volgt dat $b = 7$.

Echter, kwadraten eindigen nooit op een 7.

(b) Bij deel (a) hebben we al laten zien dat alleen de eerste vier elementen een kwadraat kunnen zijn. We bewijzen nu dat niet al deze elementen een kwadraat kunnen zijn. Stel dat $\overline{ab}$ een kwadraat is, dan geldt $\overline{ab} \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$. Voor 25, 36, 64 en 81 is het eerste element in de rij geen kwadraat en voor 16 en 49 is het derde element in de rij geen kwadraat (respectievelijk $12^2 < 166 < 13^2$ en $22^2 < 499 < 23^2$).

Verder leveren $a = 1$ en $b = 4$ wel drie kwadraten: $1^1 = 1$, $12^2 = 144$ en $38^2 = 1444$.

□

**Opgave 5** (Quintijn Puite, $n$ vergelijkingen)**.** Zij gegeven een geheel getal $n \geqslant 1$. Bekijk het volgende stelsel van $n$ vergelijkingen in $n$ reële onbekenden $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= 1 \\
x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + \cdots + 2^{n-1}x_n &= 2^{n+1} \\
x_1 + 3x_2 + 3^2x_3 + \cdots + 3^{n-1}x_n &= 3^{n+1} \\
&\vdots \\
x_1 + nx_2 + n^2x_3 + \cdots + n^{n-1}x_n &= n^{n+1}
\end{aligned}$$

Bewijs dat dit stelsel een unieke oplossing $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ heeft en bewijs dat

$$x_1 = \tfrac{1}{2}n(-1)^{n+1}(n+1)!.$$

**Oplossing.** Schrijven we $P(t) = x_1t^0 + x_2t^1 + \cdots + x_nt^{n-1}$, dan is het genoemde stelsel equivalent met $P(t) = t^{n+1}$ voor $t = 1, 2, \ldots, n$. Dus komt het oplossen van het stelsel neer op het vinden van de coëfficiënten van $P(t)$. Nu is $P(t)$ een polynoom van graad hoogstens $n-1$, dus is $Q(t) = P(t) - t^{n+1}$ een polynoom van graad $n+1$ met kopcoëfficiënt $-1$. We weten dat $t = 1, 2, \ldots, n$ nulpunten van dit polynoom zijn, zodat

$$Q(t) = P(t) - t^{n+1} = -(t-1)(t-2)\ldots(t-n)(t-a)$$

voor zekere $a \in \mathbb{R}$. Verder is de coëfficiënt van $t^n$ in $Q(t)$ gelijk aan 0, terwijl deze rechts gelijk is aan $1 + 2 + \cdots + n + a$; dus

$$a = -(1 + 2 + \cdots + n) = -\tfrac{1}{2}n(n+1).$$

We vinden nu de coëfficiënten van $P(t)$ met behulp van de Vieta-relaties, oftewel door de haakjes uit te werken in onderstaande uitdrukking, waarbij we voor de volledigheid nog opmerken dat de termen van graad $n+1$ en $n$ dus wegvallen:

$$P(t) = t^{n+1} - (t-1)(t-2)\ldots(t-n)(t-a) = x_1t^0 + x_2t^1 + \cdots + x_nt^{n-1}.$$

Daarmee liggen deze coëfficiënten uniek vast. Het is bovendien duidelijk dat de aldus gevonden rij coëfficiënten $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ook daadwerkelijk voldoet, want $t = 1, 2, \ldots, n$ invullen geeft

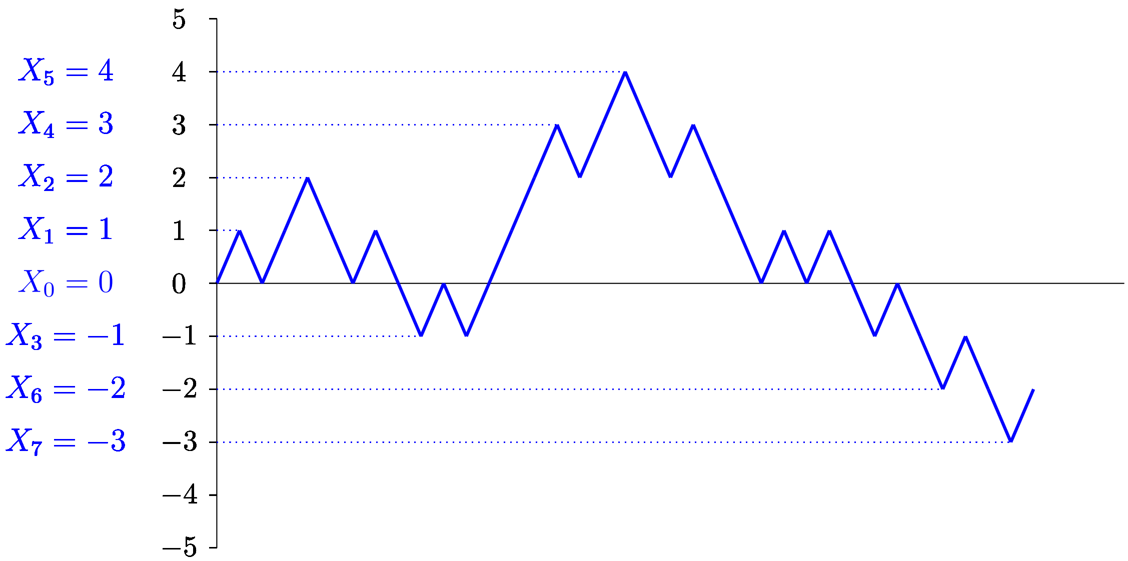
$$x_1t^0 + x_2t^1 + \cdots + x_nt^{n-1} = t^{n+1} - (t-1)(t-2)\ldots(t-n)(t-a) = t^{n+1} - 0.$$

We merken ten slotte op dat de constante term van $P(t)$ gelijk is aan

$$\begin{aligned}
x_1 &= -(-1)(-2)\cdots(-n)(-a) \\
&= -(-1)^n n!(-a) \\
&= (-1)^n an! \\
&= (-1)^n(-\tfrac{1}{2}n(n+1))n! \\
&= \tfrac{1}{2}n(-1)^{n+1}(n+1)!,
\end{aligned}$$

zoals gevraagd. $\square$

**Opgave 6** (Merlijn Staps, stochastische wandeling)**.** We bekijken een simpele stochastische wandeling op de gehele getallen. Deze begint in 0 en zet telkens met kans $\frac{1}{2}$ een stap naar rechts en met kans $\frac{1}{2}$ een stap naar links (onafhankelijk van eerder gezette stappen). We definiëren $X_0 = 0$ en voor $k \geq 1$ definiëren we $X_k$ als het eerste getal dat de wandeling bereikt dat verschillend is van elk van de getallen $X_0$, $X_1$, $\ldots$, $X_{k-1}$ (zie figuur).




(We gaan er hierbij bij de definitie van $X_k$ vanuit dat de wandeling (uiteindelijk) minstens $k+1$ verschillende getallen bereikt; dit gebeurt met kans gelijk aan 1.)
Bepaal voor ieder positief geheel getal $n$ de kansverdeling die $X_n$ volgt.

**Oplossing.** We zullen bewijzen dat

$$\mathbb{P}(X_n = a) = \begin{cases} \dfrac{|a|}{n(n+1)} & \text{voor } -n \leq a \leq n; \\ 0 & \text{voor andere } a. \end{cases}$$

We geven een bewijs door middel van inductie naar $n$. Voor $n = 1$ geldt er inderdaad dat $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Stel nu dat de bewering geldt voor alle $n < k$ met $k \geq 2$. We berekenen $\mathbb{P}(X_k = a)$ voor $0 < a \leq k$. Als $X_k = a$, dan is $a$ het $(k+1)$-ste getal dat de wandeling bereikt. De eerder bereikte getallen moeten dan de getallen $a-1$, $a-2$, $\ldots$, $a-k$ zijn. Er geldt dus $X_{k-1} = a-1$ of $X_{k-1} = a-k \leq 0$, en dus is

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_k = a) &= \mathbb{P}(X_k = a \mid X_{k-1} = a-1)\mathbb{P}(X_{k-1} = a-1) \\ &\qquad + \mathbb{P}(X_k = a \mid X_{k-1} = a-k)\mathbb{P}(X_{k-1} = a-k) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_k = a \mid X_{k-1} = a-1) \cdot (a-1) + \mathbb{P}(X_k = a \mid X_{k-1} = a-k) \cdot (k-a)}{k(k-1)}.\end{aligned}$$

Merk op dat $\mathbb{P}(X_k = a \mid X_{k-1} = a-1)$ gelijk is aan de kans $p_k$ dat een simpele stochastische wandeling die in $k$ begint eerder in $k+1$ komt dan in 0. Net zo is $\mathbb{P}(X_k = a \mid X_{k-1} = a-k)$

gelijk aan de kans $p_1$ dat een simpele stochastische wandeling die in 1 begint eerder in $k+1$ komt dan in 0. Zij meer algemeen $p_i$ de kans dat een simpele stochastische wandeling die in $i$ begint eerder in $k+1$ komt dan in 0. Er geldt $p_{k+1} = 1$ en $p_0 = 0$. Voor $1 \leq i \leq k$ geldt $p_i = \frac{1}{2}(p_{i-1} + p_{i+1})$, want vanuit het punt $i$ gaan we met kans $\frac{1}{2}$ naar het punt $i-1$ en met kans $\frac{1}{2}$ naar het punt $i+1$. Met inductie bewijzen we nu eenvoudig dat $p_i = ip_1$ voor alle $i$; voor $i = k+1$ vinden we dat $p_1 = \frac{1}{k+1}$ en dus is $\mathbb{P}(X_k = a \mid X_{k-1} = a-1) = \frac{k}{k+1}$ en $\mathbb{P}(X_k = a \mid X_{k-1} = a-k) = \frac{1}{k+1}$. We berekenen nu

$$\mathbb{P}(X_k = a) = \frac{\frac{k}{k+1} \cdot (a-1) + \frac{1}{k+1} \cdot (k-a)}{(k-1)k} = \frac{k(a-1) + k - a}{(k-1)k(k+1)} = \frac{a}{k(k+1)} = \frac{|a|}{k(k+1)}.$$

Verder is $\mathbb{P}(X_k = a) = \mathbb{P}(X_k = -a) = \frac{|a|}{k(k+1)}$ voor $-k \leq a < 0$. Hiermee is de inductie voltooid. $\square$

**Opgave 7** (Raymond van Bommel, een vreemde som). Zij $n$ een natuurlijk getal en zij $p$ een priemgetal. Bekijk de verzameling $\mathrm{Mat}(\mathbb{F}_p, n)$ alle $n \times n$-matrices met coëfficiënten in $\mathbb{F}_p$.

(a) Bepaal

$$\sum_{A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{F}_p, n)} \mathrm{tr}(A) \cdot \det(A) \in \mathbb{F}_p.$$

Beschouw nu een ondergroep $H$ van de groep $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_p, n)$ van inverteerbaare $n \times n$-matrices met coëfficiënten in $\mathbb{F}_p$. Neem aan dat $H$ de ondergroep van diagonaalmatrices bevat en dat $p > 3$.

(b) Bepaal alle mogelijke waarden van

$$\sum_{A \in H} (\mathrm{tr}(A) \cdot \det(A))^2 \in \mathbb{F}_p.$$

**Oplossing.** Beschouw een algemene $n \times n$-matrix

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dan kunnen we zowel $\det(X)$ als $\mathrm{tr}(X)$ opvatten als element van de polynoomring

$$R = \mathbb{F}_p[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{12}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{nn}],$$

namelijk als de polynomen $\mathrm{tr}(X) = x_{11} + x_{22} + \ldots + x_{nn}$ en

$$\det(X) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \cdot x_{1\sigma(1)} \cdot x_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot x_{n\sigma(n)}.$$

(a) We splitsen de oplossing op in twee gevallen.

- **(Geval** $n \geq 2$**)** We schrijven het polynoom $\mathrm{tr}(X) \cdot \det(X)$ uit als som van monomen. Voor $n = 2$ geeft dat bijvoorbeeld

  $$(x_{11} + x_{22})(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}) = x_{11}^2 x_{22} + x_{11}x_{22}^2 - x_{11}x_{12}x_{21} - x_{22}x_{12}x_{21}.$$

  Elk van de monomen $M$ heeft dezelfde totale graad, namelijk $n + 1$. Omdat $n^2 \geq n + 1$, geldt het volgende: er zijn $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$ zodat $x_{i_0 j_0}$ niet in $M$ voorkomt.

  Stel dat we nu eerst $x_{ij}$, voor alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ met $(i, j) \neq (i_0, j_0)$, vrij kiezen. Dan zijn er nog $p$ keuzes over voor $x_{ij}$, maar de waarde van $M$ hangt niet af van deze laatste keuze. Met andere woorden: $M$ neemt elke waarde $p$ keer aan. Hieruit volgt dat

$$\sum_{A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{F}_p, n)} M(A) = 0.$$

Als we nu de som van alle monomen (met de constante coëfficiënten ervoor) nemen, dan vinden we dat

$$\sum_{A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{F}_p, n)} \mathrm{tr}(A) \cdot \det(A) = 0.$$

– **(Geval** $n = 1$**)** In dit geval is $\mathrm{tr}(X) \cdot \det(X) = x_{11}^2$. We zijn op zoek naar de som van kwadraten

$$S = \sum_{i=1}^{p-1} i^2 \in \mathbb{F}_p.$$

Voor $p = 2$ geldt $S = 1$ en voor $p = 3$ vinden we $S = 2$. Voor $p > 3$ zullen we bewijzen dat $S = 0$.

We weten dat van de elementen $1, \ldots, p-1 \in \mathbb{F}_p$ precies de helft een kwadraat is (omdat $\mathbb{F}_p^*$ een cyclische groep van even orde is). In het bijzonder is er een niet-kwadraat $a$ ongelijk aan $-1$. Bekijk nu de som

$$a \cdot S = \sum_{i=1}^{p-1} a \cdot i^2 \in \mathbb{F}_p.$$

We zien dat in deze som precies alle niet-kwadraten twee keer voorkomen. Als we $S$ hierbij optellen vinden we

$$(a+1) \cdot S = \sum_{i=1}^{p-1} i^2 + \sum_{i=1}^{p-1} a \cdot i^2 = 2 \cdot \sum_{j=1}^{p-1} j = 0.$$

Omdat $a + 1 \neq 0 \in \mathbb{F}_p$, volgt hieruit dat $S = 0$.

(b) Ook nu splitsen we de oplossing op in twee gevallen.

– **(Geval** $n = 1$**)** In dit geval is $(\mathrm{tr}(X) \cdot \det(X))^2 = x_{11}^4$. Bovendien weten we dat $H$ alle elementen van $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_p, 1)$ moet bevatten. We zijn dus op zoek naar

$$S = \sum_{i=1}^{p-1} i^4 \in \mathbb{F}_p.$$

Voor $p = 5$ is dat gelijk aan 4. Voor $p > 5$ zullen we bewijzen dat $S = 0$. Zij $a$ een voortbrenger in $\mathbb{F}_p^*$. Er geldt dan

$$(a^4-1)S = (a^4-1)\sum_{i=1}^{p-1} i^4 = (a^4-1)\sum_{k=0}^{p-2} (a^k)^4 = (a^4-1)\sum_{k=0}^{p-2} (a^4)^k = (a^4)^{p-1} - 1 = 0.$$

Aangezien de orde van $a$ groter is dan 4 volgt $S = 0$.

– **(Geval $n \geq 2$)** We kijken weer naar een willekeurige monoom $M$ in het polynoom $(\mathrm{tr}(X) \cdot \det(X))^2$. In de monomen/termen van het polynoom $\det(X)$ komt er uit elke kolom van $X$ precies een factor voor. In de monomen/termen van $\mathrm{tr}(X)$ komt er uit slechts één kolom een factor voor (en geen factor uit de andere kolommen). Vanwege het ladeprincipe is er dus een kolom $k$ zodat $M$ minstens twee en hooguit drie factoren uit kolom $k$ bevat. Noem dit aantal factoren $e$.

  Als we bijvoorbeeld naar $n = 2$ kijken, dan krijgen we het polynoom $(x_{11} + x_{22})^2 \cdot (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})^2$. Een voorbeeld van een monoom dat daarin voorkomt is $-4x_{11}^2 x_{22}^2 x_{12} x_{21}$ (links en rechts de kruistermen vermenigvuldigen). Dit monoom heeft 3 factoren die uit de eerste kolom van $X$ afkomstig zijn en 3 factoren die uit de tweede kolom van $X$ afkomstig zijn. We zouden zowel $k = 1$ als $k = 2$ kunnen kiezen en in dit geval krijgen we $e = 3$.

  Bekijk nu de diagonaalmatrix $B_{k,\lambda}$ (met $\lambda \in \mathbb{F}_p^*$) met enen op de diagonaal, behalve op positie $(k, k)$, waar een $\lambda$ staat. Dan zien we dat $M(XB_{k,\lambda}) = \lambda^e M(X)$. We merken op dat $D = \{B_{k,\lambda} : \lambda \in \mathbb{F}_p^*\}$ een ondergroep van $H$ is. We kunnen de som over $H$ dus bekijken per rechternevenklasse van $D$. We zien dat

$$\sum_{B \in D} M(XB) = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p^*} \lambda^e \cdot M(B) = 0,$$

  aangezien de som van $e$-de machten in $\mathbb{F}_p$ nul is, gebruik makend van eenzelfde argument als voor de som van vierdemachten in het geval $n = 1$.

  Als we nu de som nemen over alle nevenklassen en daarna de som over alle monomen $M$, dan vinden we dat de gevraagde som gelijk aan 0 moet zijn.

□

**Opgave 8** (Arne Smeets, LIMO-loterij)**.** Op een LIMO-krasbiljet staan de getallen uit $S = \{1, 2, \cdots, 100\}$. Bij aankoop van zo'n biljet dien je 10 verschillende getallen uit $S$ te omcirkelen. Bij de trekking worden 10 verschillende getallen uit $S$ getrokken. Een winnend biljet is er een met de eigenschap dat geen enkel van de getrokken getallen omcirkeld is. Hoeveel LIMO-biljetten moet je minstens kopen om er zeker van te zijn dat je minstens één winnend biljet hebt?

**Oplossing.** Een winnende constructie met 13 biljetten is

- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- $\{1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- $\{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$
- $\{16, 17, 18, 19, 20, 26, 27, 28, 29, 30\}$
- $\{21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$
- voor $a \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, de verzameling $\{10a + 1, 10a + 2, \cdots, 10(a + 1)\}$.

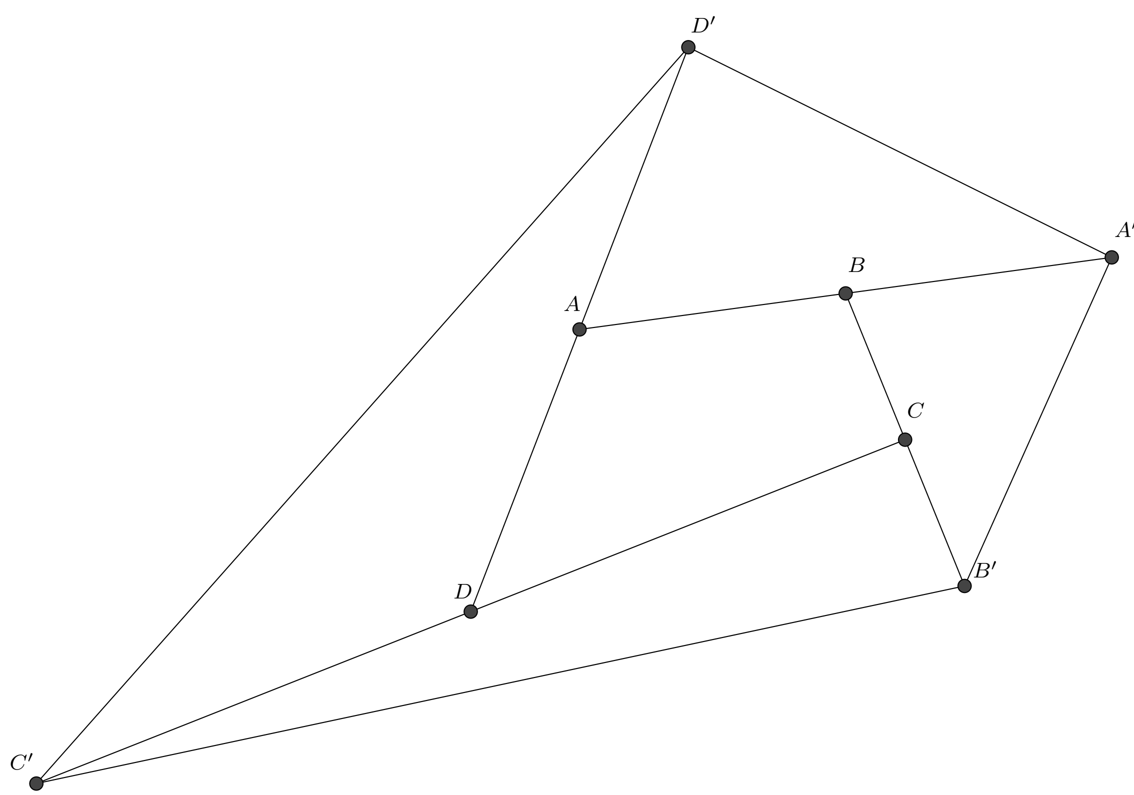
Laten we nu aantonen dat 13 biljetten ook nodig zijn. Het is evident dat je meer dan 10 biljetten moet kopen. Ook 11 biljetten is onvoldoende: dan wordt minstens één getal omcirkeld op twee verschillende biljetten. Als dat getal getrokken wordt, dan volstaat het om van elk van de 9 overblijvende biljetten één getal te trekken en dan heb je dus geen enkel winnend biljet.

Stel nu dat je er 12 koopt. Als een bepaald getal op minstens drie verschillende biljetten omcirkeld wordt, dan redeneren we zoals daarnet. Stel dat elk getal op hoogstens 2 verschillende biljetten omcirkeld wordt. Dan worden minstens 20 getallen op twee verschillende biljetten omcirkeld. Stel dat biljetten $\sharp 1$ en $\sharp 2$ een getal gemeenschappelijk hebben. Aangezien deze biljetten bij elkaar hoogstens 19 verschillende getallen bevatten, is er nog een getal dat op twee verschillende biljetten staat, maar niet op biljet $\sharp 1$ of $\sharp 2$. Neem dus aan dat $\sharp 3$ en $\sharp 4$ ook een getal gemeenschappelijk hebben. Als bij de trekking voor beide paren biljetten een gemeenschappelijk getal wordt getrokken, en ook nog één getal van elk van de biljetten $\sharp 5$, $\sharp 6$, $\cdots$, $\sharp 12$, dan is er opnieuw geen enkel winnend biljet. $\square$

**Opgave 9** (Harold de Boer, doorgespiegelde uitdijingen)**.** Zij $ABCD$ een convexe vierhoek. Dan definiëren we de doorgespiegelde uitdijing $ABCD$ door: $A'$ is $A$ gepuntspiegeld in $B$; $B'$ is $B$ gepuntspiegeld in $C$, etc. Zie schets.

(a) Stel dat $ABCD$ een rechthoek of een ruit is. Bewijs dat de doorgespiegelde uitdijing een parallellogram is.

(b) Construeer een parallellogram $A'B'C'D'$ dat de doorgespiegelde uitdijing is van zowel een rechthoek als van een ruit, waarbij die rechthoek en die ruit niet vierkant zijn; of bewijs dat zo'n parallellogram niet bestaat.



**Oplossing.**

(a) We kunnen het al bewijzen vanuit de aanname dat $ABCD$ een parallellogram is. Noem $M$ het snijpunt van de diagonalen. Bekijk de spiegeling in het punt $M$. Deze brengt $A$ over in $C$, en $B$ over in $D$. Het punt $A'$ (de spiegeling van $A$ in $B$) wordt dus overgebracht in $C'$ (de spiegeling van $C$ in $D$). Net zo brengt de spiegeling $B'$ over in $D'$. Dus $A'C'$ en $B'D'$ gaan door $M$, en bovendien is $M$ het midden van $A'C'$ en $B'D'$. Dus $A'B'C'D'$ is een parallellogram.

(b) Als we de diagonalen van de vierhoek $ABCD$ intekenen, dan is eenvoudig te zien dat $\mathrm{Opp}(A'B'C'D') = 5\,\mathrm{Opp}(ABCD)$. Als $ABCD$ de doorgespiegelde uitdijing is van zowel een rechthoek als een ruit, dan zullen die rechthoek en ruit dus al dezelfde oppervlakte moeten hebben. Noem de lengte van de zijden van de rechthoek $a$ en $b$, met $a > b$. Dan is het kwadraat van de lengtes van de zijden van $ABCD$ gelijk aan: $4a^2 + b^2$ en $a^2 + 4b^2$. Noem de lengte van de halve diagonalen van de ruit gelijk aan $c$ en $d$, met $c > d$. Dan is het kwadraat van de lengtes van de zijden van $A'B'C'D'$ gelijk aan: $9c^2 + d^2$ en $c^2 + 9d^2$. Omdat de oppervlakte van de rechthoek en de ruit gelijk moeten zijn, geldt: $ab = 2cd$. Voor het kwadraat van de lengtes van de zijden van $A'B'C'D'$ geldt:

$$
\begin{aligned}
4a^2 + b^2 &= 9c^2 + d^2 \\
a^2 + 4b^2 &= c^2 + 9d^2
\end{aligned}
$$

En dus:

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= 2(c^2 + d^2) \\
a^2 - b^2 &= \frac{8}{3}(c^2 - d^2)
\end{aligned}
$$

Door $2ab = 4cd$ op te tellen respectievelijk af te trekken van $a^2 + b^2 = 2(c^2 + d^2)$ krijgen we:

$$
\begin{aligned}
(a + b)^2 &= 2(c + d)^2 \\
(a - b)^2 &= 2(c - d)^2
\end{aligned}
$$

Dus

$$
\begin{aligned}
a + b &= \sqrt{2}(c + d) \\
a - b &= \sqrt{2}(c - d)
\end{aligned}
$$

Vermenigvuldigen we deze beide dan krijgen we $a^2 - b^2 = 2(c^2 - d^2)$, wat slechts dan gelijk is aan de hierboven gevonden $\frac{8}{3}(c^2 - d^2)$ wanneer $c = d$, wat niet mag, want dan is de ruit het uitgesloten vierkant.

$\square$

**Opgave 10** (Leslie Molag)**.** Stel dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een niet-constante oplossing is van de differentiaalvergelijking $f''(x) = f(x)^{2017}$.

(a) Bewijs het bestaan van een continue functie $F : f(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ en een $\lambda > 0$ zodanig dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$f'(x) = F(f(x)) \text{ of } f'(x) = -F(f(x)).$$

en bovendien

$$\int_{[\lambda,\infty)\cap f(\mathbb{R})} \frac{dy}{F(y)} < \infty.$$

(b) Bewijs dat er $a, b, c \in \mathbb{R}$ bestaan zodanig dat $g(x) = af(bx + c)$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking $g''(x) = g(x)^{2017}$ met $g(x) \geq \lambda$ en $g'(x) > 0$ voor alle $x \geq 0$.

*Hint: bewijs dat $f'$ hoogstens één nulpunt kan aannemen.*
*Onderscheid vervolgens de gevallen dat $f'$ geen of één nulpunt heeft.*

(c) Bewijs dat $f$ niet bestaat.

**Opmerking:** Je mag het resultaat van (a) gebruiken bij (b) en de resultaten van (a) en (b) bij (c), ook als je die resultaten niet bewezen hebt.

**Oplossing. (a)** De vraag is equivalent met het aantonen dat er een continue functie $F : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $f'(x)^2 = F(f(x))^2$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Aangezien we deze vergelijking uiteindelijk aan $f''(x) = f(x)^{2017}$ willen relateren is het een idee om de hele vergelijking te differentiëren. Daarvoor zouden we graag willen dat $F$ differentieerbaar is, we zullen deze aanname maken in de hoop dat het uiteindelijk inderdaad tot een $F$ leidt die werkt. Als we $f'(x)^2 = F(f(x))^2$ dan differentiëren krijgen we $2f''(x)f'(x) = 2f'(x)F'(f(x))F(f(x))$. Wanneer we aannemen dat we door $f'(x)$ mogen delen en gebruik maken van $f''(x) = f(x)^{2017}$ komen we uit op $2F'(f(x))F(f(x)) = 2f(x)^{2017}$. Aan deze vergelijking is voldaan als $(F(y)^2)' = 2y^{2017}$ en dat geeft als mogelijke oplossing

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{1009}}\sqrt{y^{2018} + C}$$

voor zekere integratieconstante $C \in \mathbb{R}$. De vraag is nu of de gevonden functie $F$ inderdaad werkt; we moeten dan $C = 1009f'(x)^2 - f(x)^{2018}$ hebben voor alle $x$. De uitdrukking aan de rechterkant is inderdaad constant: de afgeleide is $2018f'(x)f''(x) - 2018f'(x)f(x)^{2017} = 0$. Uit $C = 1009f'(x)^2 - f(x)^{2018}$ concluderen we nu direct dat $f'(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{1009}}\sqrt{f(x)^{2018} + C} = \pm F(f(x)$, met $F(y) = \frac{1}{\sqrt{1009}}\sqrt{y^{2018} + C}$.
Verder merken we op dat er $K, \lambda > 0$ bestaan zodanig dat

$$\frac{1}{F(y)} \leq \frac{K}{y^{1009}}$$

voor alle $y \in [\lambda, \infty) \cap f(\mathbb{R})$ en er geldt dus inderdaad

$$\int_{[\lambda,\infty)\cap f(\mathbb{R})} \frac{dy}{F(y)} \leq K \int_{[\lambda,\infty)\cap f(\mathbb{R})} \frac{dy}{y^{1009}} \leq K \int_{\lambda}^{\infty} \frac{dy}{y^{1009}} = \frac{K}{1008\lambda^{1008}} < \infty.$$

**(b)** De differentiaalvergelijking is invariant onder reflecties in de $x$-as $f(x) \to -f(x)$, reflecties in de $y$-as $f(x) \to f(-x)$ en translaties $f(x) \to f(x+c)$ dus als we $a, b \in \{-1, 1\}$ nemen zal $g(x) = af(bx+c)$ een oplossing zijn van de differentiaalvergelijking. Merk op dat ook de constante $C = 1009f'(x)^2 - f(x)^{2018}$ uit (a) invariant is onder al deze transformaties. Ofwel, voor $g$ hebben we dezelfde $F$.
We zullen eerst aantonen dat $f'$ hoogstens één nulpunt kan aannemen. Stel om een tegenspraak te bereiken dat $x_1 < x_2$ nulpunten zijn van $f'$. De stelling van Rolle zegt ons dan dat er een $\xi \in (x_1, x_2)$ bestaat zodanig dat $f''(\xi) = 0$. Er geldt dan $f(\xi)^{2017} = f''(\xi) = 0$ en dus $f(\xi) = 0$. Maar dit leidt tot $0 \leq 1009f'(\xi)^2 = C = -f(x_1)^{2018} \leq 0$, hetgeen $C = 0$ geeft. We zitten dus nu bij het geval dat $f'(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{1009}}f(x)^{1009}$, in het bijzonder hebben $f$ en $f'$ dezelfde nulpuntenverzameling. Aangezien $f$ niet-constant is moet er een $x_0$ bestaan zodanig dat $f(x_0) \neq 0$, en automatisch ook $f'(x_0) \neq 0$. Vanwege continuïteit bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat $f$ en $f'$ niet van teken veranderen op $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Met de juiste keuze van $\alpha \in \{-1, 1\}$ kunnen we ervoor zorgen dat $h(x) = \alpha f(\beta x + x_0)$ voldoet aan $h(x) > 0$ op $(-\delta, \delta)$ en met de juiste keuze van $\beta \in \{-1, 1\}$ kunnen we vervolgens ervoor zorgen dat $h'(x) > 0$ op $(-\delta, \delta)$. We hebben dus $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1009}}h(x)^{1009}$ op $(-\delta, \delta)$ en dat betekent dat $h$ strikt moet stijgen op $(-\delta, \infty)$ en daar dus in het bijzonder geen nulpunten heeft. Daar we aangenomen hebben dat $f$, en dus $h$, nulpunten heeft moeten we aannemen dat $s = \sup\{x \leq -\delta | f(x) = 0\}$ bestaat. Vanwege continuïteit moet er gelden dat $h(s) = 0$ en dus ook $h'(s) = 0$. We kunnen dus een $0 < \mu < \sqrt{1009}$ vinden zodanig dat $0 < h'(x) < 1$ voor alle $x \in (s, s+\mu)$. De middelwaardestelling geeft ons dan een $\zeta \in (s, s+\mu)$ zodanig dat $h(s+\mu) = h(s+\mu) - h(s) = h'(\zeta)\mu = \frac{1}{\sqrt{1009}}h(\zeta)^{1009}\mu < h(\zeta)$. Dit zou echter impliceren dat $h$ niet strikt stijgend is op $(s, \infty)$ dus we hebben een tegenspraak bereikt.
We moeten concluderen dat $f'$ hoogstens één nulpunt aanneemt. We beschouwen eerst het geval dat $f'$ geen nulpunt aanneemt. Met de juiste keuze voor $a, b \in \{-1, 1\}$ kunnen we er dan voor zorgen dat $j(x) = af(bx)$ voldoet aan $j(0) \geq 0$ en $j'(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. In het geval dat $f'$ wel een nulpunt aanneemt noteren we dit nulpunt met $c$. Door een juiste keuze van $a \in \{-1, 1\}$ kunnen we bereiken dat $k(x) = af(x+c)$ voldoet aan $k'(0) = 0$ en $k'(x) > 0$ voor alle $x > 0$. Dan is dus $k''(0) \geq 0$. Aangezien $k''(0) = k(0)^{2017}$ volgt ook $k(0) \geq 0$. We moeten concluderen dat in zowel het geval dat $f'$ geen nulpunt heeft als het geval dat $f'$ wel een nulpunt heeft er geldt dat er $a, b \in \{-1, 1\}$ en $c \in \mathbb{R}$ bestaan zodanig dat $g(x) = af(bx+c)$ voldoet aan $g(0) \geq 0$ en $g'(x) > 0$ voor alle $x > 0$. Door $c$ eventueel iets groter te nemen kunnen we ervoor zorgen dat $g'(x) > 0$ voor alle $x \geq 0$. Bovendien hebben we $g''(x) = g(x)^{2017} \geq g(0)^{2017} \geq 0$ voor alle $x \geq 0$ waaruit volgt dat $g'(x) \geq g'(0)$ voor alle $x \geq 0$. Dit impliceert dat $g$ kan groeien zonder bovengrens, dus door $c$ wellicht nog iets groter te nemen kunnen we ervoor zorgen dat $g(x) \geq \lambda$ voor alle $x \geq 0$.

**(c)** De resultaten van (a) en (b) impliceren dat $g'(x) = F(g(x))$ voor $x \geq 0$. Dit doet ons denken aan de kettingregel/substitutiestelling/scheiding van variabelen en het is dus natuurlijk om naar iets als

$$z = \int_0^z \frac{g'(x)}{F(g(x))} dx = \int_{g(0)}^{g(z)} \frac{dy}{F(y)}$$

te kijken. Uit vraag (b) weten we dat $g$ strikt stijgend is op $[0, \infty)$ dus aan de voorwaarden voor de substitutiestelling is inderdaad voldaan. Uit vraag (a) weten we dat de integraal in het rechterlid begrensd is als functie van $z$. Het linkerlid kan echter willekeurig groot worden ($z \to \infty$). Hieruit concluderen we dat het niet waar is dat $g(z)$ bestaat voor willekeurig grote $z$. Dit impliceert dat $f$ niet bestaat.

**Opmerking 1:** Om wat intuïtie te krijgen bij alle deelvragen is het handig om erachter te komen dat in het geval $C = 0$ alle niet-constante oplossingen, tot op reflecties en translaties na, worden gegeven door het voorschrift

$$f(x) = \left( \frac{1}{f(0)^{1008}} - \frac{1008}{\sqrt{1009}} x \right)^{-\frac{1}{1008}} \quad \text{met } f(0) > 0.$$

Het kan nog wat werk zijn om uniciteit te bewijzen maar ook als je dit voorschrift alleen kunt bewijzen op een klein open interval kun je het bij vraag (b) gebruiken om te bewijzen dat $f'$ geen nulpunten heeft in het geval $C = 0$. Deze oplossingen had je wellicht al gevonden door potentiële oplossingen van de vorm $\alpha x^\beta$ te gokken maar ze kunnen ook worden gevonden door integratie van

$$\frac{f'(x)}{f(x)^{1009}} = \pm 1.$$

**Opmerking 2:** De differentiaalvergelijking is te herschrijven als

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1^{2017} \end{pmatrix} \text{ met } y = (y_1, y_2) = (f, f').$$

De functie $(x, y) \mapsto (x, y_2, y_1^{2017})$ is continu en uniform Lipschitz continu op elke verzameling van de vorm $I \times D$, met $I$ een begrensd open interval en $D$ een begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$ zodanig dat $y(I) \subset D$. Een toepassing van de uniciteitsstelling zegt dan dat bij een gegeven beginvoorwaarde voor $y$ de oplossing $y$ uniek is. Dit betekent dat $f$ en $f'$ geen nulpunt mogen delen, want dat zou betekenen dat $f$ gelijk is aan de nulfunctie en dus constant is. Dit geeft bij vraag (b) weer een andere methode om te beredeneren dat $f'$ geen nulpunten aanneemt in het geval $C = 0$. $\square$

**Opgave 11** (Fokko de Bult, afschatting met verwachting)**.** Als je met een zuivere munt gooit duurt het gemiddeld $2n$ worpen voor je voor de $n$'de keer een kop gooit. Intuïtief komt dit omdat je gemiddeld een halve kop per worp gooit en $2n = n/\frac{1}{2}$. We gaan in deze opgave hetzelfde probleem bekijken voor algemene processen, en zien of deze intuïtie standhoudt.
Gegeven een rij $X_i$ van identiek verdeelde, onafhankelijke stochasten met een verdeling die alleen positieve waarden aanneemt (dus $X_i \geq 0$) en met verwachting $\mu = EX_i > 0$. We definiëren gerelateerde stochasten $Y_z$ (voor $z \in \mathbb{R}_{>0}$) als

$$Y_z = \min\{k \ : \ \sum_{i=1}^{k} X_i \geq z\}$$

Dus $Y_z$ geeft het aantal keer aan dat je uit de verdeling van de $X_i$ moet trekken totdat de som van de uitkomsten voor het eerst minstens $z$ is. In het voorbeeld van de muntjes heeft $X_i$ een Bernoulli verdeling met parameter $p = \frac{1}{2}$, en de stochast $Y_n - n$ (voor vaste gehele $z = n$) een negatief binomiale verdeling met parameters $n$ en $\frac{1}{2}$.
Je mag voor deze opgave aannemen dat $Y_z$ met kans 1 een eindige waarde aanneemt. Laat zien dat $EY_z \geq \frac{z}{\mu}$. Ofwel het verwacht aantal keer dat je moet trekken voor je $z$ bereikt is minstens $z$ gedeeld door de gemiddelde waarde van de trekking.

**Oplossing.** Definieer de stochasten $W_k$ door

$$W_k(\omega) = \begin{cases} Y_z(\omega) & Y_z(\omega) \leq k \\ k + \frac{z - \sum_{i=1}^{k} X_i(\omega)}{\mu} & Y_z(\omega) > k \end{cases}$$

(zoals gewoonlijk beschouwen we stochasten als functies $W_i : \Omega \to \mathbb{R}$ van de kansruimte naar $\mathbb{R}$.)
Dan geldt er dat $W_0 = \frac{z}{\mu}$ een constante stochast is, dat $W_k$ in kans naar $Y_z$ convergeert (want als $k$ groot genoeg wordt, zal het gelijk zijn aan $Y_z$ voor bijna alle $\omega$). Bovendien geldt dat $(EW_k)_{k=0}^{\infty}$ een stijgende rij is. Inderdaad is het verschil $W_{k+1} - W_k$ nul voor die $\omega$ met $Y_z(\omega) \leq k$ (omdat daar zowel $W_{k+1}$ als $W_k$ gelijk zijn aan $Y_z$). Voor $\omega$ met $Y_z(\omega) > k$ geldt dat

$$W_{k+1}(\omega) \geq k + 1 + \frac{z - \sum_{i=1}^{k} X_i(\omega)}{\mu}$$

want als $z - \sum_{i=1}^{k} X_i(\omega) < 0$ dan is $Y_z(\omega) = k + 1$ en geldt dus $W_{k+1}(\omega) = k + 1$; anders geldt hier gelijkheid. Dus is het verschil

$$W_{k+1}(\omega) - W_k(\omega) \geq (k+1) + \frac{z - \sum_{i=1}^{k+1} X_i(\omega)}{\mu} - k - \frac{z - \sum_{i=1}^{k} X_i}{\mu} = 1 - \frac{X_{k+1}}{\mu}$$

wat verwachting 0 heeft.
We willen nu concluderen dat $EY_z = \lim_{k\to\infty} EW_k \geq EW_0 = \frac{z}{\mu}$ maar deze gelijkheid volgt nog niet uit convergentie in kans. We moeten dus iets voorzichtiger zijn: Er geldt voor alle

$\omega$

$$Y_z(\omega) \geq \begin{cases} W_k(\omega) & Y_z(\omega) \leq k \\ W_k(\omega) - \frac{z}{\mu} & Y_z(\omega) > k \end{cases}$$

dus

$$EY_z \geq EW_k - P(Y_z(\omega) > k)\frac{z}{\mu}$$

De rechterkant is een stijgende rij, en omdat $P(Y_z(\omega) > k) \to 0$ geldt dat de limiet van die rij gelijk is aan $\lim_k EW_k$. Dus inderdaad hebben we $EY_z \geq \lim_{k\to\infty} EW_k \geq \frac{z}{\mu}$. $\square$

**Opgave 12** (Daniël Kroes MSc., University of California, San Diego)**.** Laat $\|\cdot\|$ een norm [1] op $\mathbb{R}^2$ zijn. Voor $x \neq y \in \mathbb{R}^2$ definiëren we

$$\ell(x,y) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-z\| + \|z-y\| = \|x-y\|\}$$

voor de verzameling punten $z$ waarvoor gelijkheid geldt in de driehoeksongelijkheid.

(a) Zij $z$ een punt op de lijn door $x$ en $y$. Bewijs dat $z \in \ell(x,y)$ dan en slechts dan als $z$ op het lijnstuk tussen $x$ en $y$ ligt.

(b) Stel dat $\ell(x,y)$ een punt $z$ bevat dat niet op de lijn door $x$ en $y$ ligt. Bewijs dat de hele driehoek met hoekpunten $x$, $y$ en $z$ bevat is in $\ell(x,y)$.

(c) Stel dat $w$ en $z$ twee punten in $\ell(x,y)$ zijn, die niet op de lijn door $x$ en $y$ liggen, en aan dezelfde kant van deze lijn liggen. Bewijs dat $xz$ en $yw$ snijden in een punt $s$, en dat $s \in \ell(x,y)$.

(d) Bewijs dat $\ell(x,y)$ gelijk is aan een lijnstuk of een parallellogram. *(Met een parallellogram bedoelen we hier het tweedimensionale object bestaande uit de rand samen met het inwendige.)*

Hint: je mag gebruiken dat elke norm op $\mathbb{R}^2$ equivalent is met de Euclidische norm. Specifiek betekent dit dat er reële getallen $c, C > 0$ zijn zodat voor elke vector $v = (a,b)$ geldt $c\sqrt{a^2+b^2} \leq \|v\| \leq C\sqrt{a^2+b^2}$.

**Oplossing.**

(a) Stel allereerst dat $z$ niet op het lijnstuk tussen $x$ en $y$ ligt. Zonder verlies van algemeenheid beschouwen we het geval waarbij $y$ tussen $x$ en $z$ ligt. Dan bestaat er een reëel getal $\alpha > 1$ zodat $x - z = \alpha(x-y)$, dus $\|x-z\| + \|z-y\| \geq \|x-z\| = \|\alpha(x-y)\| = \alpha\|x-y\| > \|x-y\|$, dus $z \notin \ell(x,y)$.

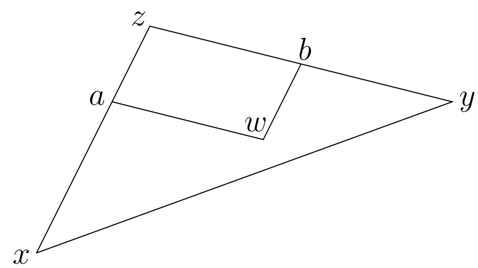
Stel nu dat $z$ op het lijnstuk tussen $x$ en $y$ ligt. Dan bestaat er een $0 \leq t \leq 1$ met $x - z = t(x-y)$ en $z - y = (1-t)(x-y)$, dus $\|x-z\| + \|z-y\| = t\|x-y\| + (1-t)\|x-y\| = \|x-y\|$, dus $z$ behoort tot $\ell(x,y)$.

(b) Laat $w$ een punt binnen de respectievelijke driehoek zijn en zij $a \in xz$ en $b \in yz$ de punten zodat $aw \parallel yz$ en $bw \parallel xz$, zie ook onderstaande figuur. Merk op dat $a$ en $b$

[1] Herinner dat een *norm* $\|\cdot\|$ op $\mathbb{R}^2$ aan elke vector $v$ in $\mathbb{R}^2$ een reëel getal $\|v\|$ toekent, zodanig dat

- $\|v\| \geq 0$ voor alle $v \in \mathbb{R}^2$;
- $\|v\| = 0$ dan en slechts dan als $v = 0$;
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$ als $\alpha \in \mathbb{R}$ en $v \in \mathbb{R}^2$;
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ voor $u, v \in \mathbb{R}^2$ (de driehoeksongelijkheid).

beiden inwendig op de respectievelijke zijden liggen en dat $zawb$ een parallellogram is.




Nu geldt dat

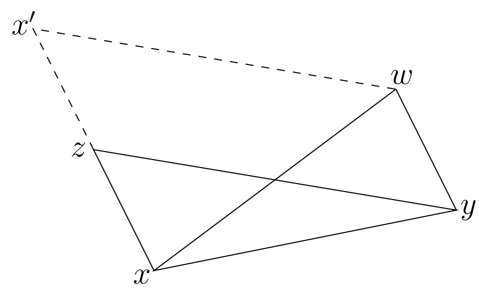
$$\begin{aligned}\|x-y\| &= \|x-z\|+\|z-y\| = (\|x-a\|+\|a-z\|)+(\|z-b\|+\|b-y\|)\\ &= \|x-a\|+\|w-b\|+\|a-w\|+\|b-y\| = (\|x-a\|+\|a-w\|)+(\|w-b\|+\|b-y\|)\\ &\geq \|x-w\|+\|w-y\| \geq \|x-y\|,\end{aligned}$$

dus in beide ongelijkheden moet gelijkheid gelden, dus in het bijzonder geldt wegens gelijkheid in de tweede ongelijkheid dat $w \in \ell(x,y)$.

Merk op dat gelijkheid in de eerste ongelijkheid bovendien impliceert dat binnen de driehoek $\|\cdot - x\|$ overeenkomt met de Manhattannorm met betrekking tot de basis $\{z-x, y-z\}$ van $\mathbb{R}^2$, dat wil zeggen als $u-x = \alpha(z-x)+\beta(y-z)$ (met $\alpha, \beta \geq 0$) dan geldt $\|u-x\| = \alpha+\beta$. Wegens schaling geldt dit nu dus op het hele stuk ingesloten door de halfrechten $xz$ en $xy$.

(c) We bewijzen allereerst dat $xz$ en $yw$ niet evenwijdig kunnen zijn. Wegens onderdeel 2 is ook elk punt op de lijnstukken $xz$ en $yw$ bevat in $\ell(x,y)$, dus kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $z-x = w-y \neq 0$. Merk op dat we uit $z, w \in \ell(x,y)$ kunnen afleiden dat

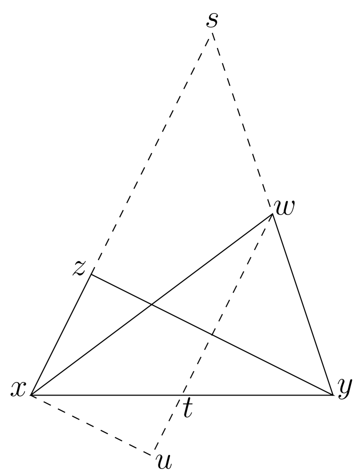
$$\|x-w\| = \|x-y\| - \|w-y\| = \|x-y\| - \|x-z\| = \|z-y\|.$$




Zij nu als hierboven $x'$ de spiegeling van $x$ in $z$, dan is $x'zyw$ een parallellogram. Aangezien $w$ in het gebied ingesloten door de halfrechten $xz$ en $xy$ ligt geldt wegens de Manhattannorm dat

$$\|x-w\| = \|x-x'\| + \|x'-w\| = \|x-x'\| + \|z-y\| > \|z-y\|,$$

wat een tegenspraak is met bovenstaande gelijkheid. Dit toont aan dat het snijpunt $s$ bestaat en (met behulp van onderdeel 2) bovendien noodzakelijkerwijs aan dezelfde kant van $xy$ ligt als $z$ en $w$. Als $s$ inwendig ligt op $xz$ of $wy$ volgt het gevraagde uit onderdeel 2, dus neem aan dat $s$ uitwendig ligt op beide lijnen. Zij $u$ het punt zodat $xu$ en $yz$ evenwijdig zijn en zodat $wu$ en $xz$ evenwijdig zijn. Merk op dat $wu$ en $xy$ nu noodzakelijk een inwendig snijpunt $t$ hebben. Zie ook de onderstaande figuur.




Wegens de Manhattannorm met betrekking tot $z - x$ en $y - z$ geldt nu dat

$$\|x - w\| = \|x - u\| + \|u - w\| = \|x - u\| + \|u - t\| + \|t - w\| = \|x - t\| + \|t - w\|.$$

Nu geldt dus dat

$$\|t - w\| + \|w - y\| = -\|x - t\| + \|x - w\| + \|w - y\| = -\|x - t\| + \|x - y\| = \|t - y\|,$$

en wegens de gelijkvormigheid van driehoeken $xsy$ en $twy$ geldt nu ook dat $\|x - s\| + \|s - y\| = \|x - y\|$, oftewel $s \in \ell(x, y)$.

(d) Definieer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door middel van $f(z) = \|x - z\| + \|z - y\| - \|x - y\|$ waarbij we $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ met de Euclidische topologie uitrusten. Wegens equivalentie van normen is dit een continue functie, dus $\ell(x, y) = f^{-1}(0)$ is gesloten met betrekking tot de Euclidische metriek. Zij nu $z \in \ell(x, y)$ een punt niet op het lijnstuk $xy$, dan is de halfrechte $yz$ gesloten in $\mathbb{R}^2$, dus hetzelfde geldt voor de doorsnede van deze halfrechte met $\ell(x, y)$. Wegens onderdeel 2 is deze doorsnede dus gelijk aan een lijnstuk $yz'$ of de hele halfrechte $yz$. Echter, aangezien deze doorsnede enkel punten bevat op afstand hooguit $\|x - y\|$ van $x$, en $\| \cdot \|$ equivalent is aan de Euclidische norm, geldt dat de doorsnede begrensd moet zijn met betrekking tot de Euclidische norm, dus ongelijk is aan de gehele halfrechte. Wegens onderdeel 3 is de richting van $z' - x$ onafhankelijk van de keuze van $z$. Per definitie is het deel van $\ell(x, y)$ aan de gegeven kant van $xy$ nu bevat in het gebied tussen de halfrechten $xz'$ en $xy$. Analoog vinden we een punt $z''$ op de halfrechte $xz$ zodat het deel van $\ell(x, y)$ aan de gegeven kant van $xy$ bevat is in het gebied tussen de halfrechten $yx$ en $yz''$. Schrijf nu $s = xz' \cap yz''$, dan is het deel van $\ell(x, y)$ aan de gegeven kant van $xy$ bevat in de driehoek met hoekpunten $x$, $y$ en $s$. Echter, wegens onderdeel 3 geldt $s \in \ell(x, y)$ en wegens onderdeel 2 geldt nu dat deze gehele driehoek bevat is in $\ell(x, y)$, en dus dat gelijkheid geldt. Aangezien $\ell(x, y)$ puntsymmetrisch is met betrekking tot het midden van $xy$ volgt nu dat het gedeelte van $\ell(x, y)$ aan de andere kant van $xy$ het gespiegelde van deze driehoek is, waaruit volgt dat $\ell(x, y)$ een parallellogram is.

$\square$